Validación en Matemática en situación de aprendizaje.

Marcela Falsetti - Tamara Marino - Mabel Rodríguez

"Validación en Matemática en situación de aprendizaje" (Falsetti, Marino, Rodríguez). Actas del VI Simposio de Educación Matemática, Chivilcoy, 2004

Universidad Nacional de General Sarmiento. Instituto del Desarrollo Humano.
Gutiérrez y J. L. Suárez, Los Polvorines. Buenos Aires, Argentina

mfalse@ungs.edu.ar – tmarino@ungs.edu.ar – mrodri@ungs.edu.ar

Palabras Claves: validación en matemática – significantes, sentido y significado matemático.

Resumen:

En el presente trabajo comunicamos un avance en una investigación que nos ha permitido clarificar la noción de validación en matemática en situación de aprendizaje. No nos hemos centrado en el estudio de la validación en las Ciencias Matemáticas. El concepto de "validación" está siendo utilizado en Educación Matemática de diversas formas, se encuentran en la bibliografía nociones tales como: herramientas de validación, proceso de validación, situación de validación, etc. En muchos casos estas nociones no están determinadas de manera precisa. En algunos trabajos incluso pareciera que "la validación" es considerada como un "término primitivo" que forma parte de otras definiciones y conceptos.
En esta presentación hemos hecho un tratamiento teórico de la noción de validación en situación de aprendizaje, estableciendo cuestiones a observar para decidir el "estado en validación" de los estudiantes. Nuestra concepción de validación en situación de aprendizaje de las Matemáticas es acorde a la de proceso de validación introducido por Balacheff en [1), 1987]; nuestro aporte en este trabajo es especificar y detallar dimensiones para el análisis de este proceso como las siguientes:
a) las acciones que realiza el sujeto en su propio proceso,
b) lo que comunica ya sea en lenguaje simbólico matemático o estándar y
c) el grado de proximidad con lo matemáticamente correcto.
También hemos avanzado en establecer una conceptualización más precisa de la validación en matemática en situación de aprendizaje. Hemos incluido, además, ejemplos de instrumentos (un test y una entrevista) que nos permitirían conocer el estado en validación de estudiantes, en este caso de nivel pre-universitario. Hemos completado el ejemplo con el análisis, previo a la implementación, de uno de los instrumentos (el test).

Validación en Matemática en situación de aprendizaje.

Introducción.
El presente trabajo forma parte de una investigación[1] marco cuyo interés es obtener información sobre cómo se beneficia el aprendizaje referido a validación en Matemática. Estudiamos la validación por ser una actividad matemática que atraviesa el aprendizaje de los contenidos matemáticos y su desarrollo estimula la autonomía en esta disciplina. Si bien la investigación pretende analizar, por un lado, cuáles son los aspectos que se deben contemplar al tratar la validación en Matemática en situación de aprendizaje y por otro lado, cómo esos aspectos debieran ser incorporados en el quehacer matemático del alumno, en este artículo nos referimos sólo a la primera parte.
En el contexto de la investigación marco surge la necesidad de evaluar el estado en validación de los estudiantes. Cabe aclarar que cuando nos referimos a validación como actividad matemática realizada por los estudiantes no nos limitamos a la actividad matemática realizada por un matemático profesional en el contexto de la formalización y fundamentación lógico-matemática. El matemático tiende a producir resultados aceptados como "válidos" en la institución matemática, (ver Godino 1997 [9)] y Balacheff 1987 [1)]). En el contexto de la *lógica y fundamentos de las matemáticas,* Godino afirma "la veracidad de un teorema descansa en la validez de las reglas lógicas usadas en la prueba; el teorema aparece como una consecuencia lógica y necesaria de las premisas de que parte, mediante la correspondiente inferencia deductiva. Un enunciado (o teorema) aceptado como verdadero tiene una validez universal e intemporal garantizada por la validez de las reglas lógicas usadas en la prueba".
En este artículo centramos nuestra atención en aquello que antecede a esta actividad y que debería ser contemplado desde la enseñanza. Nos interesa conocer el estado de los estudiantes en este "camino" hacia la validación en Matemática. Para esta tarea se requiere adoptar criterios o pautas que permitan determinar dicho estado. De ser posible, como resultado de esta evaluación, quisiéramos contar con información que nos permitiera orientar a un estudiante para que incorpore la validación en Matemática como parte de su quehacer matemático y evolucione en ella.

1. Preliminares sobre validación.

Al principio, cuando iniciamos el estudio entendíamos por *validación de un conocimiento matemático* a "cualquier proceso relativo al sujeto que pone de manifiesto las herramientas que necesita para convencerse de que un enunciado es verdadero o un procedimiento es correcto y poder sostenerlo en un ámbito social". Una vez que un enunciado es aceptado como verdadero se convierte en lo suficientemente estable como para poder ser reutilizado. Darse cuenta de cuándo es posible reutilizar las relaciones establecidas en un enunciado ya validado es parte de la validación. Además, consideramos que un alumno que valida debe: a) ejemplificar (sea esto suficiente o no según el cuantificador sea existencial o universal), b) argumentar defendiendo su postura en lenguaje coloquial y/o simbólico, c) emplear razonamientos deductivos sencillos en sus argumentaciones).

Al analizar, en situación de aprendizaje, manifestaciones observables tales como: respuestas de estudiantes, explicaciones orales, justificaciones, etc. notamos que este acercamiento a la noción de validación era insuficiente por lo menos en los siguientes aspectos: no especifica en cuáles registros (oral, escrito, simbólico-matemático, etc.) pueden manifestarse las herramientas que se mencionan. Tampoco se aclara si lo "válido" depende de cada sujeto o grupo en situación de enseñanza-aprendizaje o de la Matemática como institución (ver Godino & Batanero, 1994, en [6)], Chevallard, 2000, en [5)]). Respecto al primer aspecto notamos los límites que tiene el análisis de la notación matemática en los registros escritos pues no siempre garantiza buena información sobre el estado en validación del estudiante, como lo mostramos en los casos [1] y [2] que siguen. El estudiante puede adquirir destreza en la manipulación simbólica y no ser capaz de hacer explícitas ni inteligibles las razones, ni matemáticas ni personales, por las cuales realiza un procedimiento o técnica o asegura que una propiedad es verdadera o falsa. Recíprocamente, puede ser que el estudiante asigne un sentido, vía un razonamiento correcto, a símbolos que al ser interpretados "literalmente" y sin mediar explicación de por medio resulten incorrectos desde el punto de vista matemático. Por ejemplo, cuando se le pregunta sobre cuáles son las rectas que no contienen puntos en el primer cuadrante hay alumnos que responden: $y=-ax-b$, queriendo denotar rectas de pendiente y ordenada al origen negativas, sobreentendiendo que, aún sin especificar los rangos de validez de la fórmula, $-a$ y $-b$ representan números

[1] *Validación matemática: cómo favorecer su aprendizaje desde una perspectiva interaccionista.* Proyecto acreditado por el Programa de Incentivos, 2003.

negativos. Respecto al segundo aspecto, sobre la relatividad de lo que es “matemáticamente válido”, nos cuestionábamos si un conocimiento, aún sin ser “matemáticamente correcto” pero que “funciona”, es decir que permite al alumno avanzar en el conocimiento matemático, debiera ser aceptado como “válido”. Los siguientes casos ilustran la fuente de los cuestionamientos antes mencionados.

1.1. Validación: análisis de casos.

[1] Caso 1: Al resolver una resta algebraica entre enteros, por ejemplo “– 5 – 2”, un alumno responde “– 7”. Al explicar cómo obtuvo el resultado, el alumno describe el siguiente procedimiento:

(i) “menos por menos da **más**” mirando los signos resaltados $\boxed{-}5\ \boxed{-}\ 2$ y usando la regla de los signos de la multiplicación. Entonces

(ii) propone sumar 5 **más** 2 (elige más pues es el resultado de la regla de los signos hecha en su primer paso (i), si el resultado hubiera sido –, el alumno propone restar los números en valor absoluto).
Entonces tiene 5 + 2 = 7

(iii) observa el signo del número mayor (en valor absoluto) y le agrega tal signo al resultado obtenido en el paso (ii). Su respuesta, en este caso es –7.

La pregunta que surge al analizar este ejemplo es si es adecuado considerar que un alumno que resuelve de esta forma y describe su técnica está *validando* el conocimiento puesto en juego. El alumno presenta un procedimiento que es efectivo pues siempre que lo aplica obtiene un resultado correcto, puede ser reutilizado y sostenido en un ámbito social, se convence y puede convencer a los demás de la validez del procedimiento. Es importante destacar que si se analizara sólo lo escrito (– 5 – 2 = – 7) sólo veríamos un resultado de la cuenta correcto. Al solicitarle al alumno que explique cómo lo resolvió, su explicación no tiene fundamento matemáticamente correcto. Notamos que la noción de validación considerada arriba no es suficiente por no hacer referencia a que la matemática involucrada en la justificación dentro del proceso de validación sea o no correcta, y por no hacer explícita la necesidad de considerar distintos registros, no sólo el escrito.

[2] Caso 2: Se pide probar por inducción que para todo n natural vale: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2}$

Resolución escrita del ejercicio por parte de un alumno:

n = 1, $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1.(1+1)}{2}$ vale 1 = 1 Paso 1.

Hipótesis Inductiva: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2}$ Paso 2.

Tesis $\sum_{i=1}^{n+1} i \overset{?}{=} \frac{(n+1).(n+1+1)}{2} \overset{?}{=} \frac{(n+1).(n+2)}{2}$ Paso 3.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1) =$$ Paso 4.

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1) = \frac{n.(n+1)}{2} + (n+1) =$$ Paso 5.

$$= \frac{n.(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n.(n+1) + 2.(n+1)}{2} = \frac{(n+1).(n+2)}{2}$$ entonces vale el resultado Paso 6.

Explicación (oral) del alumno:

Paso1. El alumno explica que debe “cambiar n por 1” en la proposición dada, y luego manipular la sumatoria hasta mostrar que ambos miembros dan el mismo valor.

Paso 2. El alumno explica que copia textualmente el ejercicio dado y lo rotula como “hipótesis inductiva”.

Paso 3. El alumno explica que cambia n por n + 1 en el enunciado del ejercicio dado. Lo que obtiene lo escribe como la “tesis”.

Paso 4. El alumno explica que debe tomar la primera parte de la igualdad de la tesis y debe luego escribir dos sumandos, uno de ellos es la misma sumatoria que la del enunciado del ejercicio dado y el otro sumando es “la expresión que hay “dentro de la sumatoria” ($\sum\bigcirc$) especializada en “n + 1”.

Paso 5. En este paso, se cambia la sumatoria que se tiene escrita por el otro miembro de la igualdad del ejercicio original.
Paso 6. El resto del ejercicio es operar con lo que obtuvo hasta llegar a que aparezca el miembro derecho de la tesis.

Nuevamente aquí nos preguntamos si un alumno que realiza este ejercicio *valida* el conocimiento puesto en juego. Observamos que el alumno presenta un procedimiento efectivo pues, en todos los casos de inducción tales que la proposición sea una igualdad con el símbolo de sumatoria, la demostración escrita “se ve” correcta. Al igual que en el caso [1], aunque su resolución escrita sea correcta su explicación oral no se basa en fundamentos matemáticos. El alumno no entiende ninguno de los pasos que hace, ni el paso que resuelve ni para qué lo resuelve. Por ejemplo, en el paso 4, la explicación para indicar que está tomando el último término es absolutamente visual, el alumno señala “lo que hay dentro del símbolo de sumatoria” y señala el n + 1 que está “arriba del símbolo de sumatoria” y dice que debe reemplazar en “tal” lugar (señala) por “tal” expresión (señala). Frente a este ejemplo observamos nuevamente que la noción de validación parece requerir mayor grado de especificación.

2. Algunos antecedentes sobre el tema.

Este párrafo es una elaboración posterior a una revisión cuidadosa del tema, de su uso, definiciones, ejemplos, etc. que llevamos a cabo, tanto en revistas de Educación Matemática como en sitios de Internet, (ver por ejemplo [1)], [4)], [5)], [7)], [8)], [9)], [10)], [11)], [12)], [13)], [14)], [15)], entre otros).
La noción de validación raramente se encuentra definida, tiene múltiples acepciones y se utiliza en diferentes contextos como:

- Situación de validación.
- Proceso de validación.
- Herramientas de validación.

Situación de validación: ésta se enmarca en la Teoría de Situaciones desarrollada por Brousseau ([4)], 1997). Es aquella situación didáctica particular en la que, junto a la “actitud de prueba” (que se manifiesta en, por ejemplo, interés por dar razones que justifican alguna afirmación y estar dispuesto a defender las razones), se desarrolla y sostiene la elaboración de razones sobre lo que se hace o dice en Matemática que puedan ser progresivamente construidas, testeadas, formuladas, discutidas y acordadas. Este tipo de situación didáctica se caracteriza por: permitir o dar paso a la reflexión y al uso de diferentes formas de argumentación (retórica, pragmática, semántica o sintáctica); generar un ámbito de comunicación entre los interlocutores regido por posiciones simétricas para evitar que uno de ellos se convierta en un simple receptor; permitir la evolución y el revisado de las opiniones; favorecer una fluida relación dialéctica con otros tipos de situaciones didácticas como las de acción y formulación.
En el artículo de Balacheff [1)] se amplían las características de la situación de validación estableciéndose que una situación de validación es una situación de decisión en la que se pone en juego una puesta en común donde se debaten las decisiones tomadas y se manifiesta la necesidad de garantizar su validez o la de denunciar.

Proceso de validación: consiste en asegurarse las garantías necesarias de un compromiso en la acción; en este caso la acción de decidir sobre la verdad de una aserción. Entendemos que el proceso de validación es todo aquello que se genera y manifiesta dentro de una situación de validación. Forman parte de este proceso cuestiones como: la toma de conciencia de las contradicciones, la elaboración de pruebas de distinto tipo (ver clasificación por Balacheff en [1)]), la argumentación y la refutación como parte de la misma, etc.

Herramientas de validación: Herbst ([10)]) trabaja con herramientas de validación en el marco de estudiar qué actividades son usadas como pruebas en la clase de matemática. Aparte de los procedimientos deductivos, menciona otros no deductivos tales como el ejemplo aislado, la ostensión, la analogía y la metáfora.

Además de las formas y contextos en los que se utiliza la "validación", destacamos, a partir del análisis de los textos consultados, los siguientes aspectos:

- Dimensión comunicacional: en algunos casos se incluye un requerimiento comunicacional de "tener que convencer al público" (ver por ejemplo Perelman en [11)]), en otros casos no queda claro quién valida ([9)], [12)]) y en otros casos la interacción social es considerada como motor del proceso de validación.
- Relatividad epistemológica: En los textos consultados no queda claro que lo validado deba ser necesariamente matemáticamente correcto. En este sentido interpretamos que la noción establece un contexto de relatividad. Por ejemplo Balacheff en [1)] afirma *"que existen varias formas y niveles de validación, cuya movilización y puesta en obra son provocadas por la exigencia de la situación en la que se puede encontrar* (el sujeto)"
- Formato de "prueba matemática": en algunos casos parecería que la validación se circunscribe a la elaboración de una demostración matemática. En este caso elaborar conjeturas, discutir y comunicar no forman parte de la validación. La otra postura, más amplia considera que elaborar conjeturas, discutir, etc. forma parte de la validación o del proceso de validación.

3. Marco teórico.

Hemos optado por comenzar a trabajar en torno a lograr mayor especificidad de la noción de validación a partir de listar indicadores o cuestiones que consideramos forman parte de la misma. Consideramos que este trabajo por un lado nos aporta herramientas para resolver el problema de conocer el estado en validación de los alumnos, y por otro nos permite avanzar hacia una definición o conceptualización más precisa del término.

3.1. Cuestiones presentes en el proceso hacia la validación en Matemática.

Nos interesa poder conocer las cuestiones presentes en lo que llamamos "el proceso hacia la validación", es decir el proceso en el cual un estudiante va tomando decisiones, seleccionando argumentos y procedimientos que utilizará para elaborar las razones que considera suficientes para justificar lo que dice y hace en respuesta a alguna actividad planteada. Este proceso debiera ir aproximando al estudiante a un conocimiento matemáticamente válido que es aquél que la "institución matemática" considera correcto por cuanto hay una teoría matemática capaz de explicarlo. Centramos nuestra atención en analizar:

d) las acciones que realiza el sujeto en su propio proceso,
e) lo que comunica ya sea en lenguaje simbólico matemático o estándar y
f) el grado de proximidad con lo matemáticamente correcto.

Cabe destacar que lo que entendemos como "proceso hacia la validación" está relacionado con lo que Balacheff considera como proceso de validación que describimos antes. En el proceso hacia la validación consideramos, además, acciones previas a la toma de decisiones, como las de tipo exploratorias, imitativas, etc. En este aspecto nuestra contribución es detallar acciones observables previas a la toma de decisiones y otras que señalarían la relación dialéctica entre las situaciones de validación, acción y formulación (ver [4)]).

a) Respecto de *las acciones* consideramos, no de manera exhaustiva, las siguientes:

A1. Hacer ensayos o intentos
A2. Usar fórmulas o procedimientos desconectados de la actividad a resolver
A3. Usar fórmulas o procedimientos conectados a la actividad a resolver
A4. Generalizar inductivamente (observar alguna regularidad)
A5. Enumerar ambigüedades
A6. Ejemplificar
A7. Anticipar, predecir
A8. Elegir entre varias opciones dadas justificando su elección.
A9. Encontrar analogías
A10. Describir (mostrar pasos y procedimientos)
A11. Ejemplificar mostrando regularidades
A12. Imitar (reproducir una estructura de razonamiento o procedimiento)
A13. Explicar (dar razones y relaciones)
A14. Comparar (establecer semejanzas y diferencias)
A15. Justificar por la "autoridad" (libro, docente, par experto)
A16. Reconocer contradicciones

A17. Reconocer la adecuación o no del resultado o conclusión respecto del problema o situación de origen.
A18. Enunciar la negación de una regla, propiedad, etc.
A19. Identificar condiciones bajo las que ocurren ciertas regularidades ya reconocidas
A20. Derivar conclusiones con premisas dadas
A21. Formular un razonamiento simple (elaborar las premisas y deriva una conclusión)
A22. Reconocer qué le resulta suficiente para garantizar la validez de un conocimiento.
A23. Reconocer que las herramientas empleadas no son suficientes para garantizar la validez de un conocimiento (puede no saber cuáles necesita para garantizar la validez).

Respecto de las cuestiones b) y c), *lo comunicacional* y lo *matemáticamente correcto*, proponemos una tabla de doble entrada que permite distinguirlas e interrelacionarlas indicando para ambos aspectos diversos niveles.

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">NIVEL INICIAL
(intuiciones, creencias, sospechas, anticipaciones, etc.)</td><td colspan="2">NIVEL INTERMEDIO
(primeras concreciones, producción incipiente, incompleta, etc.)</td><td colspan="2">NIVEL TERMINAL
(elaboraciones acabadas)</td></tr>
<tr><td>Significantes matemáticos (entran en juego los signos, las reglas sintácticas en la escritura matemática)</td><td>Explicación (escrita u oral en lengua estándar o lenguaje matemático)</td><td>Significantes matemáticos (entran en juego los signos, las reglas sintácticas en la escritura matemática)</td><td>Explicación (escrita u oral en lengua estándar o lenguaje matemático)</td><td>Significantes matemáticos (entran en juego los signos, las reglas sintácticas en la escritura matemática)</td><td>Explicación (escrita u oral en lengua estándar o lenguaje matemático)</td></tr>
<tr><td>N
I
V
E
L
E
S</td><td>Esta columna, en este nivel inicial, no puede evidenciarse</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Los *significantes matemáticos* constituyen el conjunto de signos con los que se expresan las ideas matemáticas. Este conjunto de signos dotado de significados aceptados en la institución matemática constituye el *lenguaje matemático*.
La fila “niveles” puede subdividirse según diferentes niveles de lo correcto. De acuerdo al nivel de disgregación que se requiera se puede subdividir en filas que representen desde lo erróneo hasta lo correcto distinguiendo tantas filas como niveles se quieran identificar.
Los matices de grises en la tabla está indicando el nivel de complejidad tanto en los niveles de lo correcto como en la complejidad de las manifestaciones de la producción, por eso el degradé es diagonal de modo que el negro de la conjunción de las dos celdas de la esquina inferior derecha (ambas en la columna terminal) indica una elaboración acabada y matemáticamente correcta.
En los casos [1] y [2] antes descriptos tenemos una producción escrita con un uso correcto de significantes, pero el sentido asignado, que se evidencia a través de la explicación, no está de acuerdo con el significado matemático. Luego, haciendo uso de la tabla para volcar en ella la información sobre validación en estos casos, haríamos marcas dispares en la columna terminal: una de ellas en la zona del gris oscuro de la sub-columna “significantes matemáticos” y conjuntamente otra marca en la zona clara de la sub-columna “explicación”.
Para saber si la producción del alumno es *matemáticamente correcta* deberíamos analizar qué sentido le asigna a los significantes; si dicho sentido coincide con el significado institucional matemático, entonces su producción será considerada matemáticamente correcta. Quisiéramos aclarar que cuando se evalúa al alumno mediante los instrumentos tradicionales (resoluciones de ejercicios por escrito, por ejemplo) no siempre se

tiene información del sentido asignado por el alumno a los significantes y quien evalúa puede presuponer que ese sentido coincide con el significado matemático.

3.2. Aproximación a una definición.
A partir de las observaciones realizadas y la información aportada por la búsqueda bibliográfica, elaboramos una nueva aproximación provisoria al concepto de validación en Matemática en situación de aprendizaje:

Un sujeto en situación de aprendizaje valida un conocimiento matemático si es capaz de manifestar y sostener en un ámbito social las razones, elaboradas autónomamente, de por qué un enunciado es o no verdadero, un procedimiento es o no correcto o un razonamiento es o no válido. Al manifestar sus razones debe hacer explícita la asignación de sentidos de los objetos matemáticos que manipula y ésta debe corresponderse con significados matemáticos aceptados por la Institución Matemática.

Si el sujeto aún no ha llegado a validar un conocimiento en este sentido, es posible que se encuentre en el proceso hacia la validación en Matemática, antes descripto.

3.3. Un ejemplo de evaluación del estado en validación.
Como instrumentos para evaluar el estado en validación de alumnos pre-universitarios sobre aspectos de álgebra, conjuntos numéricos y funciones lineal y cuadrática proponemos la conjunción de un test seguido de una entrevista. Describimos aquí los ejercicios seleccionados para conformar el test, que contempla cantidad de acciones de las antes descriptas.
Las preguntas para la entrevista se elaboraron en base a los resultados obtenidos en el test. Con ellas se intentó a) obtener información sobre los sentidos asignados por los estudiantes a la producción escrita y en particular a los significantes, y b) indagar sobre otras acciones que la producción escrita puede no manifestar. Esta información debe volcarse en la tabla de doble entrada en las sub-columnas "explicación".

Adjuntamos al final del artículo el test y una tabla para el análisis del test que fue elaborada con el fin de anticipar conductas de los estudiantes y nos permite apreciar que la selección de actividades es adecuada pues involucra variedad de las acciones que nos interesa analizar.

Actualmente estamos en la etapa de validación de los instrumentos.

4. Bibliografía.

1) Balacheff, N. (1987) Processus de preuves et situations de validation. Educational Studies in Mathematics. 18 (2), 147-176.
2) Balacheff, N. (1991) Benefits and limits of social interactioon: The case of teaching mathematical proof. *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
3) Balacheff, N. (1999) Treatment of refutations : aspects of the complexity of a constructivist approach of mathematics learning. In : Von Glasersfeld E. (ed.) *Radical constructivism in Mathematics Education* (pp.89-110). Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.
4) Brousseau, G. Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des mathématiques, 1970-1990. Kluwer Academic Publishers. Mathematics Education Library. Vol. 19. Dordrecht. 1997.
5) Chevallard, Y., et al. (1999). Analyse des practiques enseignantes el didactique des mathematiques: l´approche anthropologique. *Actes de l´UE de la Rochelle,* La Rochelle
6) Falsetti, M., Rodríguez, M. (2001). Un modelo de gestión de la diversidad cognitiva. *Revista Uno*, No 27, 79-92.
7) Giordano Moreno, M. La validación de las afirmaciones matemáticas que surgen en la clase y su relación con la autonomía intelectual de los estudiantes. Universidad Pedagógica Nacional. Tesis de Doctorado. Formato html.www. p_ doctorado mario a_ giordano m.htm.
8) Godino J., Batanero M. C. (1994) Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14, nº 3: 325-355.
9) Godino, J.; Recio, A.; (1997), Significado de la demostración en educación matemática. [Meaning of proofs in mathematics education]. En: E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th International Conference of PME.* Lahti, Finland, Vol 2. pp. 313-321.
10) Herbst, P. (1988). What works as proof in the mathematic class? *Doctoral these.* University of Georgia, Athens.

11) Ibañez, Matemática. Formato html. www.ibanezvalidación_archivos\doc_b1ma.html
12) Larios Osorio, Víctor. Las conjeturas en los procesos de validación matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la educación matemática. Universidad Autónoma de Querétaro, México. Tesis de Maestría. (Disponible en: http://www.geocities.com/discendi2/tm/tm.html), 2000.
13) León Corredor, Lucía y Calderón, Dora (2001). Validación y argumentación de lo matemático en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 4, Núm. 1, marzo 2001, 5-21.
14) Santa Fé – Ministerio de Educación. Programa Provincial de Capacitación Docente Permanente. Formato html.www.educacionsf.gov.ar/procap/cartilla4/04_MATEMATICA/04_MATEM_TRAMO%20II_DOC_WEB.doc.
15) Selden, A.; Selden J. (1999) The role of logic in the validaction of mathematical proofs. Technical report, *Tennessee Thechnological University*, TN 38505. Nro. 1999-1, pp 1 – 13.

TEST

APELLIDO Y NOMBRES:……………………………………………………………………………..
DNI:………………..……TE:………………

Indicaciones:

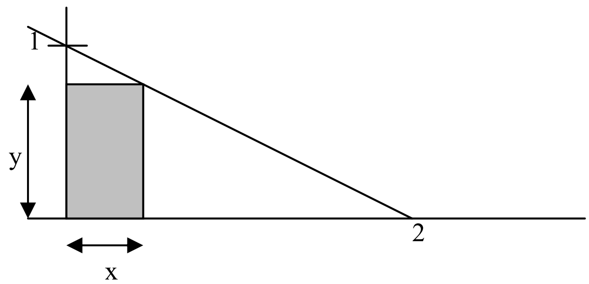
- Dejá por escrito todo lo que hacés pensando en el ejercicio. Si podés indicar lo que pensaste previamente a resolver, mejor aún.
- En los casos en los que no podés resolver el ejercicio, por favor indicá las razones: si no te resulta claro el enunciado, si hay alguna fórmula que necesitás y no recordás, etc.

---

1) Si tenemos dos números naturales pares cualesquiera, ¿podemos asegurar que su suma siempre resulta un número par? Justificar

2) Un mago realiza el siguiente truco: te dice "pensá un número, multipicalo por 2, al resultado restale 3, esto que te queda multiplicalo por 2, a lo que te dió sumale 5 veces el número que pensaste, al resultado dividílo por 3, a esto que obtuviste sumale 7 y finalmente al resultado restale 3 veces el número que pensaste. Encontraste 5". ¿Es verdadera esta afirmación para cualquier número pensado?

3) Se tiene el triángulo de vértices (0,0), (2,0) y (0,1). En él determinamos un rectángulo inscripto para cada valor de *x* en el intervalo [0,2], cuyos lados miden *x* e *y*, como lo muestra la figura:



a) Si x = 1/2, hallar el área del rectángulo correspondiente. **Respuesta: ....**

b) Determinar cuál es el mayor rectángulo inscripto en el triángulo, es decir el de área máxima, indicando cuáles son los valores de *x* e *y* correspondientes.

Valor de *x*:......................... **Valor de *y*:......................**

4) La siguiente afirmación es falsa: "<u>toda función lineal es creciente</u>". Se pide

a) Indicar con una cruz cuál o cuáles de los siguientes enunciados es la negación de dicha afirmación

Toda función lineal no es creciente	
Hay alguna función lineal que no es creciente	
Toda función lineal es decreciente	

b) Para cada una de las proposiciones de arriba, indicar cuál es verdadera y cuál es falsa justificando adecuadamente.

c) Decir cómo deben ser, en general, la pendiente y la ordenada al origen de las funciones lineales cuyos gráficos no contienen puntos del primer cuadrante. Tener en cuenta que el primer cuadrante es el conjunto $\{(x,y) / x \geq 0, y \geq 0\}$

Problema	1)	2)	3) a)	3) b)	4)
Indicador					
Ensayo (intentos)	-prueba con distintos números pares -prueba tomando las dos veces el mismo número par	-prueba con distintos valores -intenta escribir una expresión algebraica -intenta operar con la expresión algebraica para ver si le da 5			- para c) esboza gráficos
Usa fórmulas, procedimien-tos desconec-tados del problema			-usa el Teo de Pitágoras.		
Usa fórmulas, procedimientos conectados al pro-blema.	-le pone nombre a los números -traduce a símbolos el "ser par"	-hace un planteo algebraico e interpreta el "0 = 0" o "7 = 7" o si se equivoca x = n" -el planteo algebraico está bien, se equivoca en la resolución de la ecuación. -Entiende que si le hubiese dado una identidad, la ecuación tendría infinitas soluciones. -Relación entre identidad (del tipo nro fijo=nro fijo) y ecuación con infinitas soluciones.	-Encuentra la ecuación de la recta -halla la ec. De la recta, evalúa en el "x", calcula x.y -halla la altura del rectángulo por Thales o halla la diferencia a 1 de la altura del rectángulo	-Encuentra la ecuación de la recta -halla la ec. De la recta, evalúa en el "x", calcula x.y -maximiza usando el vértice. -halla la altura del rectángulo por Thales o halla la diferencia a 1 de la altura del rectángulo. Maximiza usando la cuadrática	
Generaliza inductivamente (observa alguna regularidad)	-advierte que siempre podrá sacar 2 de factor común	Prueba con varios valores y generaliza diciendo que vale para todos-		Si se cambia la recta por otra de la forma $y = m(x - r)$ (con $m < 0$), y se pide lo mismo, ¿se puede tener algún dato general sobre las dimensiones del rectángulo de área máxima?, ¿depende de m o de r?	-para c) plantea casos en los que observa que la ordenada al origrn y la pendiente es negativa y lo afirma en general
Enumera ambigüedades					-le resulta ambiguo el decir "hay alguna", si es única, etc.
Ejemplifica	-da algunos ejemplos	-Prueba con un valor -Prueba con un caso "atípico" (número grande, "raro", pi, 3,45689) -Prueba con un número que funciona como una variable.		-calcula dimensiones de distintos rectángulos y sus áreas. Hace tabla de valores y suponen un rectángulo de área máxima (sin otra justificación)	-Para c) da ejemplos gráficamente -Halla la fórmula analíticamente de algún ejemplo
Anticipa-Predice	-anticipa que es verdadero y sólo indica V	-al ver la ecuación lineal podría anticipar que o tiene una única solución o infinitas o ninguna. -Para que sea cierta la afirmación, todos los reales tienen que ser solución		-anticipa que la solución se da donde el rectángulo sea en particular un cuadrado -anticipa que la solución está en x = 1	-anticipa cómo deben ser ordenada al origen y pendiente.
Elige entre varias opciones		-si le damos varias resoluciones correctas e incorrectas, que elija.			-En b) elige la negación de la proposición dada
Encuentra analogías		-Tal vez se vea porque se trabajaron ejercicios del tipo			

Describe (muestra pasos y procedi-mientos)	-Cuenta qué habría que hacer y no lo hace.	-Cuenta qué habría que hacer y no lo hace.	-Describe los pasos de lo que habría que hacer	-Describe los pasos de lo que habría que hacer	
Ejemplifica mostrando regularidades	Toma dos valores particulares, saca factor común dos y muestra la regularidad (8 + 12 = 2.4 + 2.6 = 2.(4+6))	-evalúa la ecuación en un cierto número “n” dado, opera con los números y ve que siempre se cancela su número. Entonces deduce que vale siempre.			-Si hace gráficos y trata de mostrar la regularidad en la ordenada al origen y en la pendiente
Imita	No tiene qué imitar, no se da múltiplos en el CAU[2]	-para la entrevista tener presente que si vio el tema tal vez imite y no entienda.			-Niega sabiendo cómo cambiar los cuantificadores más allá de que entienda.
Explica (da razones y relaciones)	Puede tomar un caso particular y explicar (punto 11)	-Si se da cuenta que es lineal, prueba con dos valores, si le da V, afirma que vale para todos.		- hace la cuenta x.m(x – r) y muestra que el máximo se da en la mitad entre 0 y r.	-Explica qué condiciones deben cumplirse para la negación. Idem para no cortar el cuadrante
Compara (establece semejanzas y diferencias)		-Pensar en incluir otro mago (ec. Incompatible o con finitas soluciones)			-Compara los gráficos de funciones que no cortan al 1º cuadrante. -Compara las proposiciones para saber cómo negar
Justifica por “autoridad”	No corresponde				
Reconoce contradicciones		-Que haya probado con un valor, le haya dado V (o F) y al resolver algebraicamente se equivoca, le da un cierto x = n distinto del número que probó y no reconoce la contradicción.			-Reconoce que si la afirmación dada es falsa, necesariamente su negación debe ser verdadera. Si le diera F, tendría contradicción
Reconoce la adecuación del resultado respecto del problema dado.		-Se da cuenta que si probó con un valor y le dio, la resolución de la ecuación debe incluir ese número -Análogamente si no le dio.			
Enuncia la negación de una proposición.					-niega la proposición
Identifica condiciones bajo las que ocurren ciertas regularidades ya reconocidas	Preguntar en la entrevista si puede haber algún otro caso en el que la suma de dos números dé par.				-Puede identificar condiciones para que la recta no corte al 1º cuadrante
Deriva conclusiones con premisas dadas	Preguntar en la entrevista: ¿qué podrías afirmar del resultado de la suma de dos números múltiplos de 4?	-¿qué podrías decir si se sabe que con 5 valores vale y con 2 no? -Si supieramos que María probó con el valor n y le dio “m”, ¿qué podés deducir?			
Formula un razonamiento simple	Resuelve bien	-Si se da cuenta que es lineal, prueba con dos valores, si le da V, afirma que vale para todos.	-Resuelve bien		-Hace alguna deducción referida a que “si la pendiente fuera….entonces la gráfica cortaría…”

[2] CAU siglas de “Curso de Aprestamiento Universitario”, de la Universidad Nacional de General Sarmiento.